Теория чисел

Задачи на делимость, оценки, многочлены.

1) Натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что *ab*=*cd*. Может ли число *a*+*b*+*c*+*d* быть простым?

2) Найдите все пары целых чисел (m, n), для которых выполняется равенство $m^3+m^2=2^n+16$

3) Докажите, что множество значений многочлена x^2+1 в целых точках не содержит бесконечной непостоянной геометрической прогрессии.

4) Докажите, что члены последовательности $1+3^{3^n}+9^{3^n}, n \geq 1$, попарно взаимно просты.

5) Про рациональные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известно, что числа $x_1+x_2+\cdots+x_n$, $x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$, $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n, \ldots$, $x_1x_2\ldots x_n$ целые. Докажите, что тогда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – целые числа.

6) Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$

7) Пусть p — простое число, n - натуральное. Оказалось, что для тройки целых чисел (a, b, c) Верны равенства $a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$. Докажите, что тогда $a=b=c$.

8) Известно, что a, b, c — натуральные числа, $a-b$ простое и $3c^2=ab+bc+ac$. Докажите, что $8c+1$ - полный квадрат.

9) Пусть $a_1=2$, a_2 —наименьшее натуральное число, для которого $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}<1$, a_3 —наименьшее натуральное число, для которого $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}<1$ и т.д. Докажите, что для каждого натурального числа n выполнено равенство $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.

10) $P(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами степени больше 1. Докажите, что существует целочисленная бесконечная непостоянная арифметическая прогрессия, которая не содержит ни одного числа вида $P(k)$, где k — целое число.

11) $P(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами отличный от константы. Докажите, что существует целое число x, для которого все числа $P(x), P(x+1), P(x+2), \ldots, P(x+2013)$ составные.

Показатели и степени

0) Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что 2^a+1 делится на b, 2^b+1 делится на c, 2^c+1 делится на a?

1) Докажите, что показатель 2 по модулю 5^n равен $\varphi(5^n)=4\cdot 5^{n-1}$.

2) Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что $x^n+y^n=p^k$. Докажите, что если число n ($n>1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p с натуральным показателем.

3) Для натурального x и простого p определим $v_p(x)$ как степень, в которой p входит в разложение x на простые множители (если x не делится на p, то степень считаем равной 0). Докажите, что если для некоторых натуральных a и b $(a>b)$ и нечетного простого p $v_p(a-b)>0$, то для любого натурального n верно равенство: $v_p(a^n-b^n)=v_p(a-b)+v_p(n)$.

4) Дано p - простое число. Оказалось, что для некоторых натуральных $x, y, k,\ (k, p-1) = 1$, числа x^k и y^k дают одинаковые остатки при делении на p. Докажите, что тогда числа x и y дают одинаковые остатки при делении на p.

5) Найдите все натуральные n, для которых число $\frac{3^n-2^n}{n}$ целое.

6) Известно, что $3^n + 4^n \vdots n$. Докажите, что тогда n делится на 7.

Комбинаторная теория чисел

1) Докажите, что для любого простого числа p найдутся натуральные числа a и b, для которых $a^2 + b^2 + 1$ делится на p.

2) Докажите, что не существует набора из 100 различных натуральных чисел, в котором сумма любых 98 делится на сумму двух оставшихся.

3) Натуральные числа от 1 до 100 покрасили в несколько цветов так, что отношение двух разных чисел одного цвета не может быть целым. Какое наименьшее количество цветов могли для этого использовать?

4) В строчку выписаны 23 натуральных числа. Докажите, что между ними можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что значение этого выражения будет делиться на 2000.

5) Дано простое число $p > 2$. Докажите, что числа $1!, 2!, \ldots, (p-1)!, p!$ дают больше, чем $\sqrt{p}$ различных остатков при делении на p.

6) Из всех остатков от деления на натуральное $n > 1$ выбрали больше $3n/4$ остатков. Докажите, что существуют целые a, b, c, для которых остатки всех семи чисел a, b, c, $a+b$, $b+c$, $a+c$, $a+b+c$ являются выбранными.

7) Покажите, что среди любых 11 целых чисел можно выбрать 6 так, что их сумма будет делиться на 6.

8) Какое наибольшее количество несократимых дробей со знаменателями, меньшими данного натурального *n*, может лежать на интервале длины 1/*n*?

9) Пусть $a_1, a_2, \ldots$ - последовательность целых чисел, которая содержит бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Известно, что для каждого натурального n числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают n разных остатков при делении на n. Докажите, что каждое целое число встречается в этой последовательности ровно один раз.

10) Назовем усложнением числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли число, из которого нельзя получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

11) Последовательность $(x_n), n \in N$ определяется таким образом:

$$x_1 = 1,\ x_{2n} = 1 + x_n \text{ и } x_{2n+1} = \frac{1}{x_{2n}},\ n \geq 1.$$

Докажите, что каждое положительное рациональное число встретится в этой последовательности, причем ровно один раз.

12) Бесконечная последовательность натуральных чисел строится по следующему правилу: a_1 =2014, для $n \geq 1$ $a_{n+1} = a_n + p_n$, где p_n - наибольший простой делитель a_n. Докажите, что в этой последовательности найдется число кратное 2013.

Конструктивы

1) Докажите, что в произведении $P = 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ можно вычеркнуть один из сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом.

2) Верно ли, что для любого натурального n существует кратное 5^n натуральное число, в записи которого встречаются только нечетные цифры?

3) Постройте набор из 100 различных натуральных чисел такой, что при любом разбиении чисел этого набора на две непустые группы сумма чисел одной из групп делится на сумму чисел другой группы.

4) Докажите, что существует бесконечная последовательность натуральных чисел, в которой нельзя выбрать несколько членов так, чтобы их сумма была степенью натурального числа с показателем большим, чем единица.

5) Докажите, что любое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде разности двух натуральные чисел с одинаковым количеством простых делителей (без учета кратности).

6) Постройте число с суммой цифр 100, сумма цифр куба которого равна 100^3.

7) Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов получится ноль.

(алгебраические)

8) Докажите, что уравнение $x(x+1) = 2y^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

9) Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел (x, y) таких, что $(x^2 + y^3)$ делится на $(x^3 + y^2)$.

10) Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab.

11) Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел (m, n) таких, что у m и n одинаковые наборы простых делителей и у чисел $m + 1$ с $n + 1$ тоже одинаковые наборы простых делителей.

12) На окружности с центром в целочисленной точке лежит точка, у которой обе координаты рациональные. Докажите, что тогда точек, у которых обе координаты рациональные, на этой окружности бесконечно много.